COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________ Nom: ______________

Divendres 15 de gener de 9:00 a 10:30

1. [1½ punts] Sigui $y = Q(x)$ un polinomi de grau n. Demostreu que qualsevol diferència dividida d'ordre $n+1$ construïda a partir de Q és nul.la; és a dir, per a qualsevol conjunt de números $x, x_0, ..., x_n$ es té que $Q[x, x_0, ..., x_n] = 0$. *Hint:* quin grau té $Q[x, x_0]$?

Solució:

$$Q[x, x_0] = \frac{Q(x) - Q(x_0)}{x - x_0}; \qquad Q[x, x_0, x_1] = \frac{Q[x_0, x_1] - Q[x, x_0]}{x - x_1}$$

són polinomis de grau $n-1$, $n-2$ respectivament (ja que els numeradors admeten con arrels x_0 en el primer cas i x_1 en el segon.

Reiterant l'argument arribem a que $Q[x, x_0, ..., x_{n-1}]$ és un polinomi de grau 0 és a dir, $Q[x, x_0, ..., x_{n-1}] = C$. Llavors en particular $Q[x_n, x_0, ..., x_{n-1}] = C$ i es té

$$Q[x, x_0, ..., x_n] = \frac{Q[x_0, x_1, ..., x_n] - Q[x, x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x} = \frac{C - C}{x_n - x} = 0. \qquad \square$$

2. Considerem el PVI $y' = -50y + 100$, $y(0) = y_0$.
   (a) [½ punt] Calculeu la seva solució.
   (b) [½ punt] Quant val $L := \lim_{x \to +\infty} y(x)$?
   (c) [1 punt] Apliqueu el mètode d'Euler i deduïu una expressió per a y_j en funció només de y_0, h, j.
   (d) [½ punt] Per a quins valors de la h es satisfà $\lim_{j \to +\infty} y_j = L$?

Solució:

(a) $y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$.

(b) $L := \lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$.

(c) Aplicant el mètode d'Euler s'obté: $y_j = y_{j-1} + h(-50y_{j-1} + 100) = 100h + (1 - 50h)y_{j-1}$ d'on, com es comprova per inducció, es segueix

$$y_j = (1 - 50h)^j y_0 + 100h \sum_{k=0}^{j-1} (1 - 50h)^k = (1 - 50h)^j y_0 + 100h \frac{(1 - 50h)^j - 1}{1 - 50h - 1} = 2 + (1 - 50h)^j (y_0 - 2). \qquad (1)$$

(d) De (1)veiem que,

(i) si $y_0 = 2$, llavors $\lim_{j \to +\infty} y_j = 2 = L$ per a qualsevol h.

(ii) Si $y_0 \neq 2$, aleshores $\lim_{j \to +\infty} y_j = 2 = L$ sii $|1 - 50h| < 1$ o, equivalentment, sii $0 < h < 1/25$. $\square$

COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________ Nom: ______________

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

3. Els polinomis de Jacobi de paràmetres (α, β), $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, on el subíndex n indica el grau del polinomi, són ortogonals relativament al pes $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Considerem el cas $\alpha = \beta = 1$ i simplifiquem la notació anomenant-los simplement $P_n(x) = P_n^{(1,1)}(x)$. Si s'agafa la normalització $P_n(1) = n+1$ aquests polinomis verifiquen: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2x$, la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n+1}\right],$$

i la recurrència

$$(n+3)(2n+2)P_{n+1}(x) = (2n+3)(2n+4)xP_n(x) - (n+1)(2n+4)P_{n-1}(x).$$

(a) [1 punt] Calculeu els polinomis $P_n(x)$ per a $n = 2, 3$.

(b) [1 punt] Trobeu la fórmula de quadratura gaussiana de tres punts associada a aquesta família de polinomis ortogonals

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Hint: per a trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposeu que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2.

(c) [1 punt] Comproveu que la fórmula és exacta per a qualsevol monomi $f(x) = x^m$ de grau senar, i que ho és també per a $m = 4$ però no si $m = 6$.

Solució:

(a) Aplicant la fórmula de Rodrigues o la fórmula de recurrència tenim que

$$P_2(x) = \frac{15x^2 - 3}{4}, \qquad P_3(x) = 7x^3 - 3x.$$

(b) Els zeros de $P_3(x)$ són $x_0 = -\sqrt{3/7}$, $x_1 = 0$ i $x_2 = \sqrt{3/7}$ i la corresponent fórmula de quadratura és

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Tenim que si m és un enter parell,

$$I_m := \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) x^m\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(m+1)(m+3)} \tag{1}$$

mentre que $I_m = 0$ si m és senar.

Per trobar els pesos w_0, w_1 i w_2 imposarem que la fórmula sigui exacta quan $f(x)$ és un polinomi de grau ≤ 2. Per a això és suficient imposar que ho sigui per als monomis 1, x i x^2, la qual cosa porta al sistema d'equacions

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= \frac{4}{3}, \\ -\sqrt{\frac{3}{7}}w_0 + \sqrt{\frac{3}{7}}w_2 &= 0, \\ \frac{3}{7}w_0 + \frac{3}{7}w_2 &= \frac{4}{15}, \end{aligned}$$

del que resulten els pesos $w_0 = 14/45$, $w_1 = 32/45$, $w_2 = 14/45$. Aquesta fórmula ha de ser exacta, en principi, per a polinomis de grau com a molt 5.

(c) Els coeficients de la fórmula de quadratura s'han obtingut imposant que fos correcta per a $m = 0, 1, 2$. D'altra banda

(i) Si m és senar, com que $w_0 = w_2$, $x_1 = 0$ i $x_2 = -x_1$, tenim

$$w_0 x_0^m + w_1 x_1^m + w_2 x_2^m = 0$$

que coincideix amb el valor exacte de la integral.

(ii) Si $m = 4$

$$w_0 x_0^m + w_1 x_1^m + w_2 x_2^m = \frac{14}{45}\left(2\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^4\right) = \frac{2\cdot 7\cdot 2\cdot 3^2}{5\cdot 3^2\cdot 7^2} = \frac{4}{5\cdot 7} \underset{(1)}{=} I_4,$$

on I_4 és la integral (1) per a $m = 4$. Per tant la fórmula és exacta per a $m = 4$.

(iii) Si $m = 6$

$$w_0 x_0^m + w_1 x_1^m + w_2 x_2^m = \frac{14}{45}\left(2\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^6\right) = \frac{2\cdot 7\cdot 2\cdot 3^3}{5\cdot 3^2\cdot 7^3} = \frac{2^2\cdot 3}{5\cdot 7^2} \neq \frac{4}{7\cdot 9} \underset{(1)}{=} I_6,$$

on I_6 és la integral (1) per a $m = 6$. Per tant la fórmula no és exacta per a $m = 6$. $\square$

COGNOM(s) (en majúscules!): ______________________ Nom: ______________

Divendres 15 de gener de 10:30 a 12:00

4. Sigui $f(x)$ una funció de la qual coneixem la taula següent:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	2	-2

Taula 1

(a) [1 punt] Trobeu l'abscissa del màxim, x_M, de $f(x)$ en l'interval $I=[0,1]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim, $\widetilde{x}_M$, del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ obtingut a partir de les dades de la taula 1.

(b) [1 punt] Suposant $f\in\mathcal{C}^4([x_0,x_1])$, $x_0<x_1$, sigui $p_3(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite en els punts x_0, x_1. Si definim l'error d'aquesta interpolació com $e_3(x):=f(x)-p_3(x)$, deduïu **directament** —sense aplicar cap fórmula de l'error a la interpolació—que, per a $x\in(x_0,x_1)$:

$$e_3'(x)=f'(x)-p_3'(x)=\frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi),$$

on $\xi,\eta(x)\in(x_0,x_1)$.

(c) [1 punt] Si $|f^{(4)}(x)|<A$ i $|f^{(2)}(x)|>B$ $\forall x\in(0,1)$ amb $A,B>0$ fiteu, en funció d'A i B, l'error comès en l'aproximació de l'abscissa del màxim trobada a l'apartat (a). *Nota:* podeu fer servir el resultat de l'apartat (b).

Solució:

(a) A partir de la taula diferències dividides:

$$\begin{array}{llll}
x_0=0 \quad f(0)=3 & & & \\
 & f[x_0,x_0]=f'(0)=1 & & \\
x_0=0 \quad f(0)=3 & & f[x_0,x_0,x_1]=\dfrac{-1-1}{1-0}=-2 & \\
 & f[x_0,x_1]=\dfrac{2-3}{1-0}=-1 & & f[x_0,x_0,x_1,x_1]=\dfrac{-1-(-2)}{1-0}=1 \\
x_1=1 \quad f(1)=2 & & f[x_0,x_1,x_1]=\dfrac{-2-(-1)}{1-0}=-1 & \\
 & f[x_1,x_1]=f'(1)=-2 & & \\
x_1=1 \quad f(1)=2 & & &
\end{array}$$

veiem que el polinomi interpolador ve donat per

$$\begin{aligned}p_3(x)&=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2+f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)\\&=3+1(x-0)-2(x-0)^2+1(x-0)^2(x-1)=x^3-3x^2+x+3.\end{aligned}$$

La derivada del polinomi $p_3'(x)=3x^2-6x+1$ té per arrels $x^*_{\pm}=1\pm\sqrt{6}/3$. Clarament $x^*_-=1-\sqrt{6}/3\in(0,1)$ i $p_3''\left(x^*_-\right)=-2\sqrt{6}<0$. Així doncs, agafem $\widetilde{x}_M=x^*_-=1-\sqrt{6}/3$ com a aproximació de l'abscissa del màxim a l'interval x_M.

(b) Per construcció $e_3(x_0)=e_3(x_1)=0$ ($f(x_0)=p_3(x_0)$, $f(x_1)=p_3(x_1)$, ja que $p_3(x)$ és el polinomi interpolador d'Hermite a les abscisses x_0 i x_1). Aleshores, pel lema de Rolle, existeix $\xi\in(x_0,x_1)$ tal que $e_3'(\xi)=0$. Tenim doncs que $e_3'(x_0)=e_3'(x_1)=e_3'(\xi)=0$ (notem que, també per construcció $f'(x_0)=p_3'(x_0)$ i $f'(x_1)=p_3'(x_1)$). Sigui $x\in(x_0,x_1)$. Suposarem que $x\neq\xi$ i, sense pèrdua de generalitat, que $x<\xi$. Si ara definim la funció

$$F(z):=e_3'(z)(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)-e_3'(x)(z-x_0)(z-x_1)(z-\xi),$$

és clar que $F\in\mathcal{C}^3([x_0,x_1])$ i que s'anul·la als nodes $x_0<x<\xi<x_1$, de manera que aplicant consecutivament el lema de Rolle 3 vegades es segueix que hi ha $\eta(x)\in(x_0,x_1)$ tal que $F^{(3)}(\eta(x))=0$. Llavors, tenint en compte que $p_3(x)$ és un polinomi de grau 3 i per tant, $e_3^{(4)}(z)=f^{(4)}(z)-p_3^{(4)}(z)=f^{(4)}(z)$, resulta

$$F^{(3)}(\eta(x))=f^{(4)}(\eta(x))(x-x_0)(x-x_1)(x-\xi)-3!\,e_3'(x)=0,$$

d'on es dedueix la fórmula de l'error buscada si $x\neq\xi$. Per últim, si $x=\xi$, la fórmula es satisfà de manera trivial.

(c) Pel teorema del valor mitjà tenim que existeix $\zeta \in (x_0, x_1)$ tal que, $f'(\widetilde{x}_M) = f'(\widetilde{x}_M) - f'(x_M) = f^{(2)}(\zeta)(\widetilde{x}_M - x_M)$. Llavors, fent servir la fita sobre la derivada segona donada a l'enunciat,

$$|f'(\widetilde{x}_M)| = |f'(x_M) - f'(\widetilde{x}_M)| = |f^{(2)}(\zeta)|\,|x_M - \widetilde{x}_M| > B\,|x_M - \widetilde{x}_M|$$

i d'aquí podem aïllar $|x_M - \widetilde{x}_M|$, aplicar la fórmula d'acotació de l'error de l'apartat (b) i la fita sobre la derivada quarta per a obtenir

$$\begin{aligned} |x_M - \widetilde{x}_M| &< \frac{|f'(\widetilde{x}_M)|}{B} = \frac{|f'(\widetilde{x}_M) - p_3'(\widetilde{x}_M)|}{B} = \frac{\left|f^{(4)}(\eta(\widetilde{x}_M))\right|}{3!B}\,|\widetilde{x}_M - x_0|\,|\widetilde{x}_M - x_1|\,|\widetilde{x}_M - \xi| \\ &< \frac{A}{3!B}\,|\widetilde{x}_M - \xi|\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{A}{9B}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \end{aligned}$$

atès que $x_0 = 0$, $\widetilde{x}_M = 1 - \sqrt{6}/3$, $x_1 = 1$ i, com que $0 < \xi < 1$, hem acotat

$$|\widetilde{x}_M - \xi| < \text{màx}\,\{\widetilde{x}_M - x_0, x_1 - \widetilde{x}_M\} = \text{màx}\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \square$$